Université de Rennes1 **Année 2006/2007**

Outils Mathématiques 4

$\boxed{\textbf{Continuité et différentiabilité}}$

résumé

1 Continuité

Soient $V_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et $V_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. On va toujours utiliser la norme $||V_1|| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$, la distance associée a cette norme est donnée par $d(V_1, V_2) = ||V_1 - V_2|| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Définition 1.1 *Soit D un sous ensemble de $\mathbb{R}^2$. Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction , $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et $L \in \mathbb{R}$. On dit que L* est la limite de $f(x, y)$ lorsque (x, y) tend vers (x_0, y_0),

$$\boxed{\textit{si pour tout } \epsilon > 0, \textit{ il existe } \delta > \textit{ tel que si } 0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta, \textit{ alors } |f(x, y) - L| < \epsilon}$$

On utilise la notation $\boxed{\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\neq(x_0,y_0)}} f(x, y) = L}$

Remarque 1.2 *Pour ne pas alourdir les notations, on omettra d'écrire les conditions du type $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ (seront sous-entendues).*

Définition 1.3 *On dit qu'une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est* continue en un point $(x_0, y_0) \in D$ *si :*

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)}.$$

Définition 1.4 *Soit f une fonction de deux variables qui n'est pas (à priori) définie en un point (x_0, y_0). S'il existe un $L \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$, on dit alors que f* admet un prolongement par continuité en (x_0, y_0).

Proposition 1.5 *Dans ce cas, la fonction définie par :*

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & si \quad (x, y) \neq (x_0, y_0); \\ \\ L & si \quad (x, y) = (x_0, y_0). \end{cases}$$

est le prolongement par continuité de f en (x_0, y_0).

Dans la pratique

1. **Utilisation des coordonnées polaires:** Pour montrer que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue en (x_0, y_0), on utilise la méthode des coordonnées polaires:

   On pose $x = \rho \cos\theta + x_0$, $y = \rho \sin\theta + y_0$, $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ et $\theta \in [0, 2\pi]$. On a que $\boxed{(x, y) \to (x_0, y_0) \Leftrightarrow \rho \to 0}$.

   Si il existe $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que $\begin{cases} |f(\rho\cos\theta + x_0, \rho\sin\theta + y_0) - \ell| \leq F(\rho), \quad \forall\, \rho > 0 \\ \lim_{\rho\to0^+} F(\rho) = 0. \end{cases}$

   alors $\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = \ell}$

2. <u>**Méthode des chemins:**</u>

   (a) Pour montrer que la fonction f **n'a pas de limite en** (x_0, y_0), il suffit de trouver deux chemins différents vers (x_0, y_0), qui donnent deux limites différentes.

   (b) Pour montrer que la fonction f **n'est pas continue en** (x_0, y_0) il suffit de trouver un chemin vers (x_0, y_0) qui donne une limite différente de $f(x_0, y_0)$.

1.1 Somme, produit, quotient

On a les propriétés usuelles de fonctions continues comme:

Proposition 1.6 *Soient f et g deux fonctions continues en $P_0 = (x_0, y_0)$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en $f(P_0)$. alors,*

1. *$f + g$, $f \cdot g$ et $h \circ f$ sont continues en P_0.*
2. *si de plus $g(P_0) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue en P_0 .*

1.2 Généralisation

1. **Continuité d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$**

   On généralise ce qui a été fait pour des fonctions de deux variables à des fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$; on utilise la norme euclidienne, si $X = (x_1, \ldots, x_n)$ et $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ alors

   $$||(x_1, \ldots, x_n)|| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}, \text{ et la distance associée } d(X, Y) = ||X - Y||.$$

   On a f continue en un point $P_0 \in \mathbb{R}^n$ si $\displaystyle\lim_{(x_1,\ldots,x_n)\to P_0} f(x_1, \ldots, x_n) = f(P_0)$

2. **Continuité d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$**

   Définition 1.7 *Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est continue si et seulement si chaque composante $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$ est continue.*

   Exemple 1.8 *Pour $n = 2$ et $m = 3$: La fonction $f(x, y) = (xy, (x^2 + y^2)e^{xy}, x \sin(x + y^3))$ est continue en tout point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$ car ses composantes, $f_1(x, y) = xy$, $f_2(x, y) = (x^2 + y^2)e^{xy}$ et $f_3(x, y) = x \sin(x + y^3)$ sont des fonctions continues en (x_0, y_0).*

2 Différentiabilité

2.1 Dérivées partielles et directionnelles

Définition 2.1 *On dit que* **la dérivée partielle par rapport à** *x d'une fonction f existe en (x_0, y_0) si la limite $\displaystyle\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x\neq 0}} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$ existe. On note alors, par $f'_x(x_0, y_0)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ cette limite.*

De même, **la dérivée partielle de par rapport à** *y de $f(x, y)$ en (x_0, y_0), notée $f'_y(x_0, y_0)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ est la limite (si elle existe) $\displaystyle\lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta y\neq 0}} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$.*

Définition 2.2 .

- *Le* **gradient** *d'une fonction* f *en un point* (x_0, y_0) *est le vecteur défini par*

  $\boxed{\nabla f\ (x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0))}$.

- *la* **différentielle** *d'une fonction* f *en un point* (x_0, y_0) *est définie par*

  $\boxed{df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy.}$

Définition 2.3 *Soit* f *une fonction et* $v = (a, b)$ *un vecteur de norme* 1 *(*$\|v\| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$*).*

La **dérivée directionnelle** *de* f *au point* $P_0 = (x_0, y_0)$ *et dans la direction du vecteur* v *notée* $f'_v(P_0)$ *est définie par* $f'_v(P_0) = \lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \dfrac{f(P_0 + tv) - f(P_0)}{t} = \lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \dfrac{f(x_0 + ta, y_0 + tb) - f(x_0, y_0)}{t}$ *(si cette limite existe).*

Remarque 2.4 $f'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_{(1,0)}(x_0, y_0)$*, et* $f'_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_{(0,1)}(x_0, y_0)$*.*

2.2 Différentiabilité

Définition 2.5 *Soit* f *une fonction de deux variables dont les dérivées partielles existent en* (x_0, y_0)*. On dit que* f *est* différentiable en (x_0, y_0) *si*

$$\epsilon(\Delta x, \Delta y) = \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) - \nabla f\ (x_0, y_0) \cdot (\Delta x, \Delta y)}{||(\Delta x, \Delta y)||}$$

tend vers 0 *lorsque* $(\Delta x, \Delta y)$ *tend vers* $(0, 0)$*.*

Remarque 2.6 *"·" désigne le produit scalaire:* $\nabla f\ (x_0, y_0) \cdot (\Delta x, \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y$*.*

Remarque 2.7

1. *Si* $z = f(x, y)$ *et* $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ *alors,* f *est différentiable en* (x_0, y_0) *si et seulement si* $\Delta z = df(x_0, y_0) + ||(\Delta x, \Delta y)||.\epsilon(\Delta x, \Delta y)$ *avec* $\lim\limits_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \epsilon(\Delta x, \Delta y) = 0$.

   Donc, si Δx *et* Δy *sont "très petits", la différentielle* $df(x_0, y_0)$ *peut servir d'approximation de la variation* $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$*.*

2. *Pour montrer que* f *n'est pas différentiable en* (x_0, y_0) *il suffit de trouver un chemin vers* $(0, 0)$ *le long duquel la limite de* $\epsilon(\Delta x, \Delta y)$ *est différente de* 0*.*

3. *Pour montrer que* f *est différentiable en* (x_0, y_0)*, on peut utiliser la méthode des coordonnées polaires, en posant* $\Delta x = \rho \cos \theta$ *et* $\Delta y = \rho \sin \theta$*.*

Théorème 2.8 .

1) *Si* f *différentiable en* (x_0, y_0) *alors, elle est continue en* (x_0, y_0)*.*

2) *Si* f *est différentiable en* (x_0, y_0)*, alors la dérivée directionnelle de* f *en* (x_0, y_0) *existe dans toute direction* $v = (a, b)$ *de norme* 1 *et se calcule par la formule:* $\boxed{f'_v(x_0, y_0) = \nabla f\ (x_0, y_0) \cdot v = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)a + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)b.}$

3) *Si* f *une fonction de classe* C^1 *dans un voisinage de* (x_0, y_0) *(i.e. les dérivées partielles sont continues), alors* f *est différentiable en* (x_0, y_0)*.*

2.3 Somme, produit, quotient

Proposition 2.9 *Soient f et g deux fonctions différentiables en $P_0 = (x_0, y_0)$. Alors*

1. *$f+g$ est différentiable en P_0 , $\nabla(f+g)(P_0) = \nabla f(P_0) + \nabla g(P_0)$ et $d(f+g)(P_0) = df(P_0) + dg(P_0)$.*
2. *$f \cdot g$ est différentiable en P_0, $\nabla(f \cdot g)(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot g(P_0) + f(P_0) \cdot \nabla g(P_0)$ et $d(f \cdot g)(P_0) = g(P_0) \cdot df(P_0) + f(P_0) \cdot dg(P_0)$.*
3. *si de plus $g(P_0) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est différentiable en P_0 et*

$$\nabla(\frac{f}{g})(P_0) = \frac{\nabla f(P_0) \cdot g(P_0) - f(P_0) \cdot \nabla g(P_0)}{(g(P_0))^2} \text{ et } d(\frac{f}{g})(P_0) = \frac{g(P_0) \cdot df(P_0) - f(P_0) \cdot dg(P_0)}{(g(P_0))^2}.$$

Remarque 2.10 *Les résultats précédents se généralisent aux fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n > 2$.*

Généralisation Ce qui est fait dans cette partie s'adapte facilement à des fonctions de plusieurs variables ($n \geq 2$).

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est différentiable si et seulement si chaque composante $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j \in \{1, \dots, m\}$ est différentiable.

Exemple 2.11 *La fonction $f(x, y) = (xy \ln(x^2+1), (x^2+y^2)\cos(x+y^3), x(2x+y^3)^3)$ est différentiable en tout point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$ car ses composantes, $f_1(x, y) = xy\ln(x^2+1)$ et$f_2(x, y) = (x^2+y^2)\cos(x+y^3)$ et $f_3(x, y) = x(2x+y^3)^3$ sont des fonctions différentiables en (x_0, y_0).*

2.4 Accroissements

Soit f une fonction de deux variables différentiable en (x_0, y_0).

- La valeur maximale (respectivement minimale) de la dérivée directionnelle $f'_v(P_0)$ est $\|\nabla f(x_0, y_0)\|$ (respectivement $-\|\nabla f(x_0, y_0)\|$).
- C'est dans la direction $\nabla f(x_0, y_0)$ (respectivement $-\nabla f(x_0, y_0)$) que le taux d'accroissement de f est maximal (respectivement minimal)

2.5 Différentiabilité des fonctions composées.

Soient f, g et h des fonctions telles que $z = f(u, v)$, $u = g(x, y)$ et $v = h(x, y)$.

Si en tout point (x, y) où g et h sont définies, le couple $(u, v) = (g(x, y), h(x, y))$ appartient au domaine de définition de f, alors $z = f(g(x, y), h(x, y))$ définit une fonction composée de x et y.

La règle suivante donne les dérivées partielles premières de la fonction composées en fonction des dérivées partielles premières de f, g et h.

Soit $z = f(u, v)$, $u = g(x, y)$ et $v = h(x, y)$ des fonctions différentiables alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial h}{\partial y} \end{aligned}$$

la règle de dérivation des fonctions composées se généralise à des fonctions d'un nombre quelconque de variable (≥ 2) par exemple:

Soit $z = f(r,s,t,u)$, $r = g(x,y,z)$, $s = h(x,y,z)$, $t = k(x,y,z)$ et $u = l(x,y,z)$ des fonctions différentiables alors

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial k}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial l}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial k}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial l}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial k}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial l}{\partial z}$$

2.6 Différentiablilité d'une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

On commence par généraliser le gradient:

Définition 2.12 *Soit $u_1 = f_1(x_1,\ldots,x_n), u_2 = f_2(x_1,\ldots,x_n),\ldots,$ et $u_m = f_n(x_1,\ldots,x_n)$, une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. La* matrice Jacobienne de f en *$((x_1,\ldots,x_n)$, notée $J_f(x_1,\ldots,x_n)$, est définie par*

$$J_f(x_1,\ldots,x_n) = \frac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

où le coefficient (i,j) de la matrice est la dérivée partielle $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$.

Remarque 2.13 *Les lignes de La matrice Jacobienne de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sont formées les gradients des composantes f_i de f.*

Exemple 2.14 *Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y) = (x^2+y^2, x^2-y^2, xy)$. Déterminner la matrice jacobienne de f au point $(2,-1)$.*

En utilisant la définition pour $n = 2$ et $m = 3$, $f_1(x,y) = x^2 + y^2$, $f_2(x,y) = x^2 - y^2$ et $f_3(x,y) = xy$ on obtient

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_m}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \\ y & x \end{pmatrix}$$

En particulier au point $(2,-1)$ on a

$$J_f(2,-1) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Définition 2.15 *Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est* différentiable au point P_0 *si chaque composante $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est différentiable au point P_0 pour $i \in \{1,\ldots,n\}$.*

2.7 Le théorème de composition

On voudrait généraliser le résultat suivant: Soient $f(y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables, alors $f \circ g$ est différentiable et $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g(x)$.

Ce résultat reste valable si on remplace "dérivée" par "matrice Jacobienne":

Théorème 2.16 (Théorème de composition) .

Soient $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ différentiable en P_0 et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ différentiable en $g(P_0)$, alors $f \circ g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ est différentiable en P_0 et

$\boxed{J_{f\circ g}(P_0) = J_f(g(P_0)) \cdot J_g(P_0).}$

La jacobienne d'une composée de deux fonctions est le produit des matrices jacobiennes.

Remarque 2.17 *En d'autre termes si $y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), y_2 = f_2(x_1, \dots, x_n), \dots,$ et $y_m = f_n(x_1, \dots, x_n)$, sont m fonctions de n variables, et $x_1 = g_1(t_1, \dots, t_k), x_2 = g_2(t_1, \dots, t_k), \dots,$ et $x_n = g_n(t_1, \dots, t_k)$, sont n fonctions de k variables toutes différentiables, alors en considérant les y_i comme des fonctions des t_j par*

$$y_i = f_i(g_1(t_1, \dots, t_k), \dots, g_n(t_1, \dots, t_k))$$

on obtient

$$\frac{\partial y_i}{\partial t_j} = \frac{\partial y_i}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \frac{\partial y_i}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_j} + \dots + \frac{\partial y_i}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_1}\frac{\partial g_1}{\partial t_j} + \frac{\partial f_i}{\partial x_2}\frac{\partial g_2}{\partial t_j} + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}\frac{\partial g_n}{\partial t_j}$$

Quelques cas particuliers.

1. Cas $k = n = m = 1$: On obtient $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.
2. Cas $k = 2$, $m = 2$, $n = 3$: On a deux fonctions

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z)) \end{array}$$

et

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \mapsto & (g_1(u, v), g_2(u, v)), g_3(u, v))) \end{array} .$$

La formule du théorème de composition et la définition de la matrice Jacobienne donnent:

$$J_{f\circ g}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u} & \frac{\partial g_1}{\partial v} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u} & \frac{\partial g_2}{\partial v} \\ \frac{\partial g_3}{\partial u} & \frac{\partial g_3}{\partial v} \end{pmatrix}$$

ce qui donne en effectuant le produit de matrices:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f_1 \circ g)}{\partial u}(P_0) &= \frac{\partial f_1}{\partial x}(g(P_0)) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial u}(P_0) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(g(P_0)) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial u}(P_0) + \\ &+ \frac{\partial f_1}{\partial z}(g(P_0)) \cdot \frac{\partial g_3}{\partial u}(P_0); \\ \frac{\partial(f_2 \circ g)}{\partial u}(P_0) &= \frac{\partial f_2}{\partial x}(g(P_0)) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial u}(P_0) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(g(P_0)) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial u}(P_0) + \\ &+ \frac{\partial f_2}{\partial z}(g(P_0)) \cdot \frac{\partial g_3}{\partial u}(P_0) \end{aligned}$$

Exemple 2.18 *Soit $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. On utilise les coordonnées polaires $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. On obtient*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} f(r\cos\theta, r\sin\theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot\sin\theta;\\
\frac{\partial}{\partial \theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot(-r\sin\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot(r\cos\theta).
\end{aligned}$$

Que donnent ces formules pour $f(x,y) = xy$?

2.8 Dérivées partielles d'ordre supérieur

Soit f une fonction dont les dérivées partielles existent en tout point $(x,y) \in D$. Alors, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont encore des fonction de deux variables. On peut calculer les dérivées partielles premières $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0,y_0)$ et $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0,y_0)$ de la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ par rapport à x et y en un point (x_0,y_0) (si elles existent). On procède de la même manière avec les dérivées partielles de $\frac{\partial f}{\partial y}$.

On utilise la notation suivante pour les quatre dérivées partielles d'ordre 2 de f en (x_0,y_0):

$$f''_{xx}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0,y_0), \qquad f''_{xy}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0,y_0),$$

$$f''_{yx}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0,y_0), \qquad f''_{yy}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0,y_0).$$

Définition 2.19 *On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est* de classe C^2 en (x_0,y_0) *si toutes les dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à 2 existent et sont continues en (x_0,y_0).*

Théorème 2.20 (de Schwarz) *Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de classe C^2 en (x_0,y_0) alors on a*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0).$$

Remarque 2.21 *Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0)$ le théorème précédent permet de conclure que f n'est pas de classe C^2 en (x_0,y_0)*

On va généraliser le Lemme de Schwarz. Pour ceci on introduit d'abord les dérivées partielles d'ordre k, pour $k \geq 2$ en dérivant (si la dérivée existe) les dérivées partielles d'ordre $k-1$ par rapport à x et y (définition par récurrence).

Définition 2.22 *Soit $k \in \mathbb{N}$. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est* de classe C^k en $P_0 \in \mathbb{R}^2$ *si toutes les dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à k existent et sont continues en P_0.*

Le théorème de Schwarz se généralise pour une fonction de classe C^k:
le calcul d'une dérivée d'ordre k ne dépend pas de l'ordre dans laquelle on prend les dérivées partielles successives . Par exemple pour une fonction de classe C^4 on a:

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^2 \partial x}(P_0) = \frac{\partial^4 f}{\partial y \partial x^2 \partial y}(P_0) = \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}(P_0) = \frac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial x^2}(P_0) = \frac{\partial^4 f}{\partial y \partial x \partial y \partial x}(P_0) = \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial x \partial y}(P_0)$$

Le théorème de Schwarz se généralise aussi pour les fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 3$ qui sont de classe C^k, $k \geq 2$. Par exemple une fonction $f(x, y, z)$ est de classe C^2 si ses trois dérivées partielles premières: $\frac{\partial f}{\partial u}(P_0)$, $u \in \{x, y, z\}$ et ses 9 dérivées partielles secondes: $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(P_0)$, $u, v \in \{x, y, z\}$ sont continues. Dans ce cas on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(P_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(P_0), \qquad u, v \in \{x, y, z\}.$$

2.9 Plan tangent

Rappel: Soit $v = (a, b, c)$ un vecteur non nul (i.e. $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$) et (x_0, y_0, z_0) un point de l'espace $\mathbb{R}^3$. L'équation du plan (affine) qui passe par le point (x_0, y_0, z_0) et qui admet (a, b, c) comme vecteur normal est $\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.}$

Définition 2.23 *Soit S une surface de $\mathbb{R}^2$ et $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un point de S. Le* **plan tangent** *en P_0 à la surface S est l'ensemble des droites tangentes aux courbes (régulières) tracées sur S et qui passent par P_0.*

Théorème 2.24 *Soient $F(x, y, z)$ une fonction différentiable, S la surface définie par $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = 0\}$ et $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un point de S.*

Si $\nabla F(P_0) = (F'_x(P_0), F'_y(P_0), F'_z(P_0)) \neq (0, 0, 0)$, alors une équation du plan tangent à S en $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ est donnée par $\boxed{\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(P_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(P_0)(z - z_0) = 0.}$
Donc, c'est le plan de $\mathbb{R}^3$ qui passe par le point (x_0, y_0, z_0) et qui admet $\nabla F(P_0)$ comme vecteur normal.

En particulier, si S est le graphe d'une fonction $f(x, y)$, en posant $F(x, y, z) = z - f(x, , y)$, on a $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = 0\}$, d'où:

Corollaire 2.25 *Soit $f(x, y)$ une fonction qui est différentiable en (x_0, y_0). Le* plan tangent au graphe $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\}$ de f en $P_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, *est défini par l'équation:*
$\boxed{z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).}$
C'est le plan qui admet $(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1)$ comme vecteur normal et qui passe par le point P_0.